**第8讲 三元一次方程组及其解法**

**知识梳理**

**1．三元一次方程组有关的概念(重点)**

**(1)三元一次方程**

含有\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_个未知数，并且含有未知数的项的次数都是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_的整式方程叫做三元一次方程.如*x*+*y*-2*z*=0，3*a*-*b*+*c*=0等都是三元一次方程.

**(2)三元一次方程组**

如果方程组中含有\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_个未知数，且含有未知数的项的次数都是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，并且一共有三个方程，这样的方程组叫做三元一次方程组.

例如：等都是三元一次方程组.

[知识拓展](1)三元一次方程组与二元一次方程组的区别是三元一次方程组中多了一个未知数，故称“三元一次方程组”.

(2)“未知项”与“未知数”不同，“未知项”是含有“未知数”的项.

(3)每个方程中不一定都含有三个未知数.

[规律方法]三元一次方程组必须满足：①方程组中有且只有三个未知数；②含未知数的项的次数都是1；③方程组中的每个方程都是整式方程.

**2．三元一次方程(组)的解**

一般地，使三元一次方程等号两边的值\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_的\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_个未知数的值，叫做三元一次方程的解.

三元一次方程组的三个方程的\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，叫做三元一次方程组的解.

[知识拓展]三元一次方程组的解是三个数，要将这三个数代入方程组中的每一个方程进行检验，只有这些数满足方程组中的每一个方程，这些数才是这个方程组的解.

**3．三元一次方程组的解法**

解三元一次方程组的思想方法是：

三元一次方程组 二元一次方程组 一元一次方程

根据方程组的特点，可以归纳出此类方程组为：

类型一：有表达式，用代入法.

类型二：缺某元，消某元.

类型三：相同未知数系数相同或相反，加减消元法.

**4．列三元一次方程组解应用题的一般步骤**

(1)弄清题意和题目中的数量关系，用字母(如*x*，*y*，*z*)表示题目中两个(或三个)未知数；

(2)找出能够表达应用题全部含义的相等关系；

(3)根据这些相等关系列出需要的代数式，从而列出方程并组成方程组；

(4)解这个方程组，求出未知数的值；

(5)写出答案(包括单位名称).

[重点剖析](1)解实际应用题必须写“答”，且在写答案前要根据应用题的实际意义，检查求得的结果是否合理，不符合题意的应该舍去.

(2)“设”“答”两步，都要写清单位名称，应注意单位是否统一.

(3)一般来说，设几个未知数，就应列出几个方程并组成方程组.

(4)应用题一般不要求写出解方程组的过程，只写出“解这个方程组得”即可.

**典型解析**

**例1：**(1)下列方程中，是三元一次方程的是( ).

C.4*x*+3*y*-2*z*=5 D.2*x*-5*z*=7

[解析]本题直接考查三元一次方程的概念.A选项中，*xy*为二次项；B选项中不是整式；D选项为二元一次方程，故A，B，D均不是三元一次方程.故选C.

[答案]C

[点拨]判定一个方程是否为三元一次方程应满足以下条件：①方程中共有3个未知数；②含有未知数的项的次数为1；③含未知数的项为整式.

(2)下列方程组中，是三元一次方程组的有( ).

A.1个 B.2个 C.3个 D.4个

[解析]本题主要考查三元一次方程组的概念，③中出现的含未知数的项有二次项，故它不是三元一次方程组.故选C.

[答案]C

[点评](1)三元一次方程组中共有三个未知数，且含未知数的所有项均为一次项，且均为含未知数的整式.

(2)三元一次方程组中的某个方程可以为二元一次方程，甚至是一元一次方程，只要保证方程组共有三个未知数即可.

**例2：**三元一次方程组的解是( ).

[解析]此题是选择题，不用直接去解方程组，可以根据方程组解的定义，将A，B，C，D四个选项分别代入三元一次方程组，看是否成立.将A选项代入方程组得2×1≠3×3≠6×5，故选项A错误；将B选项代入方程组得2×6≠3×3≠6×2，故选项B错误；将C选项代入方程组得2×6=3×4=6×2，6+2×4+2=16，满足方程，故选项C正确；将D选项代入方程组得2×4≠3×5≠6×6，故选项D错误.故选C.

[答案]C

[点评]此题是选择题，可把选项代入求解，也可以直接解三元一次方程组，得出解之后找对应选项.

**例3：**用代入法解方程组：

(1) (2)

(1)将方程组中的①代入③消去*x*，得2*y*-3+*y*+*z*=41，即3*y*+*z*=44，④将②④联立，得解得再把*y*=12代入①，得*x*=21，所以原方程组的解是

(2)[解析]要求此方程组的解，思路就是消去一个未知数，变成二元一次方程组.可以把①②中的*z*用含*x*，*y*的式子表示出来，再分别代入③中得到二元一次方程组，解之即可.

[答案]由①得*z*=*x*+*y*，④

由②得*z*=7-2*x*-*y*，⑤

将④⑤分别代入③，得

解这个方程组，得

把代入④，得*z*=3，

所以原三元一次方程组的解为

**例4：**用加减法解方程组

[解析]这是一个三元一次方程组，要求出它的解，需要消去未知数，观察可知①中有-2*z*，②中有2*z*，③中有2*z*.-2*z*与2*z*的和为0，所以将①与②两式相加，可消去*z*，①与③两式相加也可以消去*z*，于是原方程组变成二元一次方程组，问题就可得到解决.

[答案]①+②，得3*x*-2*y*=-1，④

①+③，得-2*x*+6*y*=10，⑤

④与⑤联立，得解得

把*x*=1，*y*=2代入①中，得*z*=3.

所以原三元一次方程组的解为

解三元一次方程组的方法技巧

(1)整体代入思想

解三元一次方程组常采用代入消元法与加减消元法，在熟练掌握常规方法的基础上，若能结合方程组的特点，适当变形，运用整体代入思想求解.可以简化解题过程，起到事半功倍的效果.

(2)设参数法

当方程组中未知数出现比例的形式时，可设1份为*k*，然后再根据其比例确定各未知数的值，最后将其代入一个方程中，可求出*k*的值，从而求出未知数的值.

**例5：**解下列方程组：

(1) (2)

(1)观察可知方程①只含有两个未知数*x*，*z*，并且方程③中*x*，*z*的系数分别与方程①中*x*，*z*的系数相同，故可把①代入③进行消元.即把①代入③，得*y*+(-4)=-1，所以*y*=3.

把*y*=3代入②，得*z*-2×3=-1，所以*z*=5.

把*z*=5代入①，得*x*-5=-4，所以*x*=1.

从而可以求得原方程组的解为

[小结]凡是方程组中有一个方程只含有两个未知数，并且这两个未知数的系数与另一个方程中的这两个未知数的系数分别相同，就可采用此法求解.

(2) [解析]注意到①中的5*x*-15*y*=5(*x*-3*y*)，这样就与②有了联系，把②整体代入该方程中，可求出*z*的值，从而易得*x*与*y*的值.

[答案]由①得5(*x*-3*y*+2*z*)-6*z*=38.④

把②整体代入④得*z*=2.

把*z*=2代入①③得解得

所以原方程组的解是

[点评]将原方程组中的一个方程(或经过变形整理后的方程)整体代入其他方程中，从而达到消元求解的目的.

**例6：**解下列方程组：

(1) (2)

(1) [解析]因为方程①是一个连等的形式，故可以根据其特点令其等于一个常数*k*，直接将三元转化为一元求解.

[答案]设所以*x*=2*k*，*y*=3*k*，*z*=5*k*.

把它们代入②，整理，得2*k*-6*k*+15*k*=22，解得*k*=2.

所以*x*=4，*y*=6，*z*=10.

所以原方程组的解为

[点评]解三元一次方程组时，如果有一个方程是连等或比值的形式，可用设比值参数法消元求解.解三元一次方程组应具体问题具体分析，分析其结构特点及系数之间的关系，灵活巧妙地消元，从而提高解题能力.

(2)可设*x*=*k*，则*y*=2*k*，*z*=3*k*，然后将*x*，*y*，*z*的值代入③，可解出*k*的值，从而求出*x*，*y*，*z*的值，即*x*=*k*，*y*=2*k*，*z*=3*k*时，2*x*+*y*-3*z*=2*k*+2*k*-9*k*=15，所以*k*=-3，所以

**例7：**解方程组

[答案]设则*x*+*y*=2*k*，*t*+*x*=3*k*，*y*+*t*=4*k*，

三式相加，得

将代入②，得

所以*k*=6，所以

②-⑤，得*x*=3，②-④，得*y*=9，②-③，得*t*=15.

所以原方程组的解为

5.三元一次方程组的解法在其他数学问题中的运用

数学知识不是孤立存在的，它们之间总是相互联系、相互作用.三元一次方程组的解法在以后学习数学的过程中经常用到，是“待定系数法”的重要基础，也是解决有关求值问题的重要工具.

**例8：**在等式*y*=*ax*2+*bx*+*c*中，已知*x*=1时，*y*=0；*x*=2时，*y*=9；*x*=3时，*y*=22，问：当*x*=4时，*y*的值是多少？

[解析]把*x*，*y*的三组值分别代入*y*=*ax*2+*bx*+*c*，得到关于*a*，*b*，*c*的三元一次方程组，解这个三元一次方程组，求出*a*，*b*，*c*的值，再将*x*=4代入，即可求出当*x*=4时*y*的值.

[答案]由题意知

②-①，得3*a*+*b*=9.④

③-②，得5*a*+*b*=13.⑤

⑤-④，得2*a*=4，所以*a*=2.

把*a*=2代入④，得*b*=3.

把代入①，得*c*=-5.

所以*y*=2*x*2+3*x*-5，

所以当*x*=4时，*y*=2×42+3×4-5=39.

**例9：**已知方程组的解使代数式*x*-2*y*+3*z*的值等于-10，求代数式(3*k*+6)2013的值.

[解析]由题意可知，此方程中的*k*是已知数，*x*，*y*，*z*是未知数，先解方程组，求出*x*，*y*，*z*(用含有*k*的代数式表示)，然后把求得的*x*，*y*，*z*代入等式*x*-2*y*+3*z*=-10，可得关于*k*的一元一次方程，求出*k*的值，进而可求(3*k*+6)2013的值.

[答案]②-①得*z*-*x*=2*k*.④

③+④得2*z*=6*k*，*z*=3*k*.

把*z*=3*k*分别代入②和③，得*y*=2*k*，*x*=*k*

把*x*=*k*，*y*=2*k*，*z*=3*k*代入*x*-2*y*+3*z*=-10，得*k*-4*k*+9*k*=-10，

解得

**例10：**“五一”前夕，北京某些中学举办了足球联赛活动，这次足球联赛共赛11轮，胜一场记3分，平一场记1分，负1场记0分.某校队所负的场数是胜的场数的结果共得20分.这次足球联赛共赛11轮，说明该校队参加了11场比赛，你能求出该校队胜、平、负各多少场吗？

[解析]该题中的已知量有比赛总场数、总得分数、胜的场数与负的场数之间的关系.由此不难提炼出三个相等关系：①胜场数+负场数+平场数=11，②胜得分+平得分=总分数，③胜场数=2×负场数.由此可列三元一次方程组求解.

[答案]设该校队胜、平、负的场数分别为*x*场、*y*场、*z*场，

则由题意可列出方程组解得

答：该校队胜、平、负的场数分别为6场、2场、3场.

**走进中考**

解方程组

答案：设则原方程可化为

①+②，得2*a*+2*c*=1，④

②+③，得2*a*+4*c*=4，⑤

④与⑤组成方程组，得解这个方程组，得

把代入①，得*b*=6.

因此.即原方程组的解为

[提示]此方程组较为复杂，通过观察各个方程可以发现将分别看成一个整体，则方程可化为三元一次方程组，再通过三元一次方程组的解法可求解.

**同步训练**

**一、填空题**

1.三元一次方程2*x*-3*y*+4*z*=8，用*x*、*y*的代数式表示*z*是  .

2.在三元一次方程*x*+*y*+*z*=3中，若*x*=-1，*y*=2，则*z*＝＿2＿.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(填“是”或“不是”)三元一次方程组的解.

答案：是 [提示]把分别代入三个方程中，代入①，左边=1，右边=1，左边=右边；代入②，左边=2，右边=2，左边=右边；代入③，左边=3，右边=3，左边=右边.所以它是原方程组的解.

4.方程组用\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_法解，先消去未知数\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_比较好.

答案：加减消元；*c* [提示]∵三个方程的未知数*c*的系数都是1，∴用加减消元法消去未知数*c*比较好.

5.已知则*x*+*y*+*z*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：3 [提示]①+②+③，得2(*x*+*y*+*z*)=6，所以*x*+*y*+*z*=3.

6.解方程组，则*x*＝\_\_6\_\_\_，*y*＝\_\_\_8\_\_\_，*z*＝\_\_\_3\_\_\_\_.

7.当=0､1､-1时，二次三项式的值分别为5､6､10，则*a*= 3 ， *b=* -2 ，*c*= 5 .

8.已知， 则的值等于 .

**二、选择题**

9.下列方程中，三元一次方程共有( B )

(1)； (2)； (3)； (4) .

A.1个 B.2个 C.3个 D.4个

10.已知方程3*x*-*y*-7=0，2*x*+3*y*=1，*y*=*kx*-9有公共解，则*k*的值为( B )

A.3　　　 B.4　　　 C.5　　　　 D.6

**三、解答题**

11.解下列三元一次方程组.

(1)  (2) (3)

(4) (5)

解: (1)  (2) 

解：(3)

由①+②+③得2(*x*+*y*+*z*)=6，即*x*+*y*+*z*=3，④

由④-①得*z*=2.

由④-②得*x*=1.

由④-③得*y*=0.

所以方程组的解是

由①+②+③得*x*+*y*+*z*=9.④

由④+①得*x*=7.

由④+②得*y*=5.

由④+③得*z*=-3.

所以方程组的解是

(5)由①，得，由②，得，把④⑤代入③，解得.分别代入④⑤，得.所以原方程组的解为

12.用卖2头牛、5只羊的钱买13头猪，剩钱1000元；用卖3头牛，3头猪的钱买9只羊，钱正好花完；用卖6只羊、8头猪的钱买5头牛，还差600元钱.求牛、羊、猪的价钱各是多少.

答案：设每头牛的价钱是*x*元，每只羊的价钱是*y*元，每头猪的价钱是*z*元，

根据题意，得解这个方程组，得

答：每头牛的价钱是1200元，每只羊的价钱是500元，每头猪的价钱是300元.

**【探索创新】**

解含字母*m*的三元一次方程组

规范解答

由①+②+③得(*m*+2)(*x*+*y*+*z*)=3(*m*+2).

当*m*+2=0，即*m*=-2时，0·(*x*+*y*+*z*)=3·0，此时方程组的解不能唯一确定；

当*m*≠-2时，得到*x*+*y*+*z*=3.④

由①-④得(*m*-1)*x*=*m*-2，

由②-④得(*m*-1)*y*=*m*-1，

由③-④得(*m*-1)*z*=*m*.

当*m*=1时，此方程组无解.

当*m*≠1时，方程组的解为

综上所述，当*m*=-2时，方程组的解不唯一确定.

当*m*=1时，方程组无解.

当*m*≠1且*m*≠-2时，方程组的解为

解后反思

解含有字母系数的方程组同解含有字母系数的方程一样，在字母两边同时乘以或除以字母系数时，需要弄清字母的取值范围，进行分类讨论.